PUTEREA DE APROXIMAȚIE A FUNCȚIILOR SPLINE POLINOMIALE DE MAI MULTE VARIABILE

Lect. univ. Daniela Răchițan

Abstract

This paper considers the problem of extending numerical methods based on spline approximations to functions of two and more variables .The results are needed for approximating the solution of Fredholm integral equation of second kind. When the functional space is restricted to a subspace of itself consisting of spline functions we also calculate the order of convergence using some results presented in [3] and Strang Fix condition.

The paper is organized as follows; sections 1, 2 and 3 are dealing with preliminaries, section 4 presents the problem we have to solve, in section 5, 6 we present some demonstrated results and results we need demonstrated in 7, the section 8 contains the main result and some concluding remarcs

1. Punerea problemei

Cuvântul variabilă (aici cu sensul de argument) are în teoria probabilităților şi în statistică o altă semnificație.

Problema definirii funcțiilor spline de mai multe variabile a apărut ca o generalizare a problemei atât pentru cazul unidimensional cât şi din necesitatea aproximării funcțiilor cu argument multiplu (definite pe $G\subset R^d$).

Vom nota cu $S_{k,\Delta}(R^d)$ spațiul funcțiilor spline polinomiale care pe ochiurile unei rețele Δ sunt polinoame de grad cel mult k din $C^p(R^d)$ (care admit derivate continue până la ordinul φ). Unii autori cer ca funcțiile să aparțină $C_r^{\varphi}(R^d)$ ($\exists$ $f^{(k)}$ şi $\Delta^k(t)$ continuă până la ordinul φ de cel mult r ori în raport cu fiecare variabilă, $f^{(\varphi)}$ să fie din $L_2(G)$). Funcțiile spline pot fi privite ca făcând parte din clasa funcțiilor radiale sau ca soluții ale unei probleme variaționale. Testarea opiniei mai multor specialişti a dovedit că cea mai utilizată definiție este cea clasică (de polinomiale pe porțiuni). Din acest motiv vom adopta ideea clasică deşi suntem convinşi că metoda variațională va juca un rol mai important în teoria funcțiilor spline de mai multe variabile decât acela pe care îl joacă în teoria funcțiilor spline de o variabilă.

Extinderea la mai multe dimensiuni a fost începută de Birkhoff şi Garabedian în lucrarea "Smooth Surface Interpolation"(1960 pag 258-268). Au urmat contribuții ale lui C. de Boor, Alberg, Nilson şi Walsh referitoare la funcțiile spline bicubice, poliedrale etc.şi utilizarea acestora în metodele numerice. Vom fi preocupați în această lucrare de metoda spline relativă la ecuațiile integrale de spența a II-a. În materialul "Multivalente Piecewise Polinomials" publicat în 1993 C. de Boor realizează o schiță a dezvoltărilor recente în domeniul în care se regăsesc rezultate în actualitate dar şi idei din lucrările lui Frenke şi Schumaker (1991).

2. Funcții spline bicubice

Fie $\Omega\in R^2$ domeniu mărginit. $\Omega=\{(x,y)\in R^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ Δ_x : $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, Δ_y : $c=y_0<y_1<\ldots<y_M=d$, $\Delta = \Delta_x\times\Delta_y$ $\Omega i,j = \{(x,y) \in\Omega \mid x_{i-1}\le x\le x_i,\ y_{i-1}\le y\le y_j$ $i=1,2,\ldots,N$ $j=1,2,\ldots,M\}$

Definiția 1 O funcție $S_\Delta:\Omega\to R$ se numeşte funcție **spline bicubică** (de două variabile) în raport cu Δ dacă satisface:

1.$S_\Delta \mid \Omega ij$ polinom de grad cel mult trei în variabile x şi y.

2.$S_\Delta \in C_2^4(\Omega)$ unde $C_r^n(\Omega) = \{f:\Omega \to R \mid f$ admite derivate parțiale continue până la ordinul n nu mai mult decât r în raport cu fiecare argument$\}$.

Observație. *Ca şi în cazul funcţiei spline de o variabilă S_Δ se poate reprezenta ca o funcţie liniară de un număr finit de funcţii polinomiale liniar independente a căror alegere nu e unică (şi care de multe ori se precizează prin valorile lor în anumite puncte).*

S_Δ(xi,yi)= funcțiile C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij} sunt funcții spline bicubice ce poartă numele de *funcții spline cardinale bidimensionale.*

Definiția 2. *Funcţia spline bicubică se numeşte de interpolare pe punctele diviziunii Δ pentru mulţimea de numere reale z_{ij} i=1,...,N j=1,...,M (care pot fi valorile unei funcţii de două variabile în nodurile (x_i,y_j) date) dacă satisface egalităţile:*

S_Δ(xi,yi)=

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(x,y) f(x_i,y_j) + \sum_{j=0}^{M}\left[D_{0j}(x,y)\frac{\partial f(x_0,y_j)}{\partial x} + D_{Nj}(x,y)\frac{\partial f(x_N,y_j)}{\partial x}\right] +$$

$$+\sum_{i=0}^{N}\left[E_{i0}(x,y)\frac{\partial f(x_i,y_0)}{\partial y} + E_{iM}(x,y)\frac{\partial f(x_i,y_M)}{\partial y}\right] + F_{00}(x,y)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y} +$$

$$+ F_{N0}(x,y)\frac{\partial^2 f(x_N,y_0)}{\partial x\partial y} + F_{0M}(x,y)\frac{\partial^2 f(x_0,y_M)}{\partial x\partial y} + F_{NM}(x,y)\frac{\partial^2 f(x_N,y_M)}{\partial x\partial y}$$

z_{ij} $0 \le i \le N$ $0 \le j \le M$

Observație. *Existenţa şi o clasificare analogă celei pentru funcţiile spline de o variabilă pot fi găsite în [2].(S_Δ poate fi de speţa I, I', II, II', periodică dacă întâlneşte anumite condiţii în x_0, x_n, y_0, y_M - toate combinaţiile posibile de puncte).*

Teorema 1. *Fie $f \in C_4^8(\Omega)$* $\Omega=\{(x,y)\in R^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$ şi

$\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ o diviziune de forma precizată $\|\Delta\| = \max\{\|\Delta_x\|, \|\Delta_y\|\}$ iar $S_\Delta(f,x,y)$ funcţia spline de interpolare pe nodurile diviziunii Δ.

Raportul dintre lungimea cea mai mare şi lungimea cea mai mică a intervalelor diviziunii îl presupunem uniform mărginit.

$l_x = \min(x_{i+1}-x_i)$ $L_x = \max(x_{i+1}-x_i)$ i=1,2,…, N $\mu_x = \dfrac{L_x}{l_x} < M_1$

$l_y = \min(y_{j+1}-y_j)$ $L_y = \max(y_{j+1}-y_j)$ j=1,2,…, M $\mu_y = \dfrac{L_y}{l_y} < M_2$

în plus $\|\Delta\| \to 0$.

Fie $\gamma = \alpha+\beta \le 6$, $0 \le \alpha \le 3$, $0 \le \beta \le 3$. Atunci $\dfrac{\partial^\gamma S(f,x,y)}{\partial^\alpha x \partial^\beta y}$ este uniform convergentă în raport cu x şi y către $\dfrac{\partial^\gamma f(x,y)}{\partial^\alpha x \partial^\beta y}$. Ordinul de convergenţă depinde de forma celor două diviziuni α respectiv β. Are loc relaţia:

$$\frac{\partial^\gamma f(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial^\gamma S(f,x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} + O(\|\Delta_x\|^{n-\alpha} + \|\Delta_y\|^{n-\beta}).$$

Demonstraţia în [1].

Observație . *O consecinţă importantă a acestei teoreme se referă la convergenţa şirului de funcţii spline corespunzătoare unui şir de diviziuni $\{\Delta_N\}_{N=1}^{\infty}$ din ce în ce mai rafinate. $S_N f = S_N(f,x,y)$ N=1,2,...dacă $\|\Delta_N\| \to 0$ când $N \to \infty$ şi f - $S_N f$ sunt de tipul I', II' sau f şi $S_N f$ dublu periodice iar $f \in C_2^4(\Omega)$ către f şi a derivatelor sale parţiale până la ordinul 6 de cel mult 3 ori în raport cu variabilele x şi y către derivatele periodice ale lui f.*

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\frac{\partial^{\gamma} f}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}-\frac{\partial^{\gamma} S_{Nf}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\right\|=0 \quad \gamma=\alpha+\beta=6 \quad 0\le\alpha\le 3 \quad 0\le\beta\le 3.$$

Mulțimea $C_2^4(\Omega)$ poate fi organizată ca spațiu Hilbert

$H(\Omega) = =H^2[a,b] \otimes H^2[c,d]$.

Funcționala $\varphi: C_2^4(\Omega)\to R_+$ $\varphi(t)=\left\{\int_c^d\int_a^b \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}dxdy\right\}^{1/2}$

este seminormă în $H(\Omega)$. Funcția spline de interpolare cu condiția ca la frontieră să fie singura care minimizează φ.

Considerând seminorme mai generale, spații de funcții interpolatoare mai generale se pot obține cu unele modificări adecvate, generalizări ale funcției spline de două variabile.

Manstield a încercat să facă o teorie a funcțiilor spline bicubice definite pe un domeniu Ω oarecare (care nu e dreptunghi). În acest caz apar anumite dificultăți.

3. Spațiul $S_{k,\Delta}^p(R^d)$

Inginerii angajați în programe aerospațiale sau nucleare au lucrat cu produse fensoriale de funcții spline încă dinaintea anului 1960. Preocupările mai serioase ale matematicienilor au atins subiectul funcțiilor spline polinomiale pe porțiuni neexprimate prin produse fensoriale după 1970.

Spațiul $S_{k,\Delta}^p$ este format din funcții C^p (sau C_r^p) care pe ochiurile rețelei Δ numite porțiuni sunt funcții polinomiale de grad mai mic sau egal cu k. Diviziunea Δ din ochiuri distincte cu interior nevid și cu reuniunea o mulțime G subdomeniu al lui R^d . Clasa de continuitate ne dă informații asupra modului în care se face racordarea pe frontiera acestor celule.

Definiția 3. *O funcție aparține spațiului $S_{k,\Delta}^p(R^d)$ al funcțiilor spline de d variabile (de grad cel mult k și netezime p) dacă satisface:*

1) $\forall$ $\delta\in\Delta$ un ochi de rețea $s|\delta \in P_k(\delta)$ adică este polinom de grad cel mult k după fiecare argument.

2) $s\in C^p(G)$ $G\subset R^d$ (sau $G=R^d$) (unii autori nuanțează cerința considerând $s\in C_r^p(G)$ definit în paragraful).

Pentru $\varphi \ge 0$ ochiurile rețelei se vor închide în politopuri (poligoane pentru R^2, poliedre pentru R^3 etc). Fiecărei celule de acest fel îi corespunde o mulțime de vârfuri şi o mulțime de muchii. În acest caz sarcina îmbinară funcțiilor polinomiale care corespund unor adiacente pe frontieră devine dificilă.

Partiția Δ se va numi regulată dacă este înfăşurătoarea convexă a intersecțiilor mulțimilor de vârfuri. Cele mai simple partiții regulate pentru d>2 sunt triangulațiile (se numesc astfel şi pentru d oarecare).

Schumaker a făcut o listă conținând obiectivele (scopurile) pe care le dorea atinse.

s1) să expliciteze sub forma unei formule, dimensiunea spațiului de funcții spline;

s2) să construiască explicit baze pentru aceste spații formate din elemente cu suport local;

s3) să găsească algoritm pentru calculul convenabil şi evaluarea funcției spline însă şi a derivatelor, a integralelor;

s4) să estimeze puterea de aproximație a spațiilor de funcții spline de mai multe variabile;

s5) să găsească în ce condiții e aplicabilă în mod eficient interpolarea cu funcții spline de mai multe variabile;

s6) să găsească algoritmi pentru utilizarea funcțiilor din acest spațiu în metodele numerice la rezolvarea ecuațiilor (mă refer în special la ecuațiile integrale).

În urma unor încercări nu prea reuşite au apărut îndoieli că vor fi uşor de atins aceste obiective chiar şi în cazul cel mai simplu al funcțiilor spline bidimensionale.

De exemplu nu este clar dacă trebuie pusă aprioric restricția ca gradul polinoamelor să fie mai mic sau egal decât k. Să considerăm celulele δ_1 şi δ_2 de o anumită dimensiune. Pe o celulă de tipul $\delta_1 \times \delta_2$ se poate să folosim rezonabil elemente ale produsului $\mathbb{P}_k(\delta_1) \times \mathbb{P}_k(\delta_2)$. Să considerăm spre exemplu, cazul funcțiilor spline bidimensionale. Pentru o partiție formală din triunghiuri şi patrulatere restricția uniformă asupra gradului nu mai pare rezonabilă. Dacă rafinăm partiția împărțind patrulaterele în triunghiuri vom obține o partiție care are avantajul uniformității. Ochiurile ei pot fi suportul unor funcții polinomiale de grad mai mic decât cel inițial (corespunzător partiției inițiale) şi cu proprietăți de netezime. Cu toate că triangulațiile au acest avantaj ca o consecință a dominației anterioare a metodelor bazate pe produse tensoriale, partiționarea suprafețelor se preferă să se facă în celule dreptunghiulare.

4. Dimensiunea spațiului $S_{k,}^{p}{}_{\Delta}$

Dacă p=-1 atunci putem da formula $S_{k,}^{-1}{}_{\Delta}=\dim \mathbb{P}_k(R^d)\ \#\ \Delta$.Pentru p=0 nu există speranță pentru o formulă generală exceptând cazul mai simplu când Δ este o triangulație.

Fie b_f forma BB (Bernstein - Bezier) a funcției polinomiale f (vezi pag. 80).

Prin transformarea $f \longrightarrow b_f$ realizăm o corespondență biunivocă între $S_{k,}^{p}{}_{\Delta}$ şi mulțimea $A_{k,\Delta} = \{v_\alpha,\ |\alpha|=k,\ <v>\in\Delta\}$, deci dim $S_{k,}^{0}{}_{\Delta}=\#A_{k,\Delta}$.

Pentru p>1 s-ar putea crede că $S_{k,}^{p}{}_{\Delta}$ e un subspațiu liniar al lui $S_{k,}^{0}{}_{\Delta}$ care conține funcții din G^p. Dificultățile apar în găsirea unei baze în $C^{(p)}$. Acestea sunt evidențiate în articolul lui Strang cu privire la dimensiunea spațiului $S_{k,}^{p}{}_{\Delta}$. Strang pentru cazul funcțiilor spline de două variabile anunță o conjectură privind limita inferioară a aplicabilități teoremei datorată lui Schumaker.

Teorema 2. *Fie Δ o triangulație în R_2 cu vârfurile V_I şi muchiile M_I. Pentru fiecare vârf $v\in V_I$ să notăm cu M_v mulțimea muchiilor cu punctul final în v.*

$E_v \subset E_{\bar{v}}$ (muchiile care conțin acest vârf).

Atunci dim $S_{k,}^{p}{}_{\Delta} = \dim \mathbb{P}_k + \mathbb{P}_{k-n-1}\ \#\ M_I - (k^2+3k-\varphi^2-3\varphi)/2\ \ (2\ \#V_I) \in[\sigma,\bar{\sigma}\,]$

unde [ ] înseamnă interval închis şi nu diferență divizată iar

$$\sigma = \sum_{v\in V_j}\sum_{j=1}^{k-\rho}(p + j + 1 - j\ \#M_v)_+$$ *şi $\bar{\sigma}$ de definit în acelaşi fel înlocuind M_v cu $M_{\bar{v}}$.*

Exemplu. Problema determinării dimensiunilor spațiului $S_{k,}^{1}{}_{\Delta}$ unde Δ este o partiție obținută prin considerarea a patru vârfuri ale unui patrulater convex şi a unui punct interior. Considerăm pe rând situațiile în care punctele se găsesc pe una sau pe amândouă diagonalele evidențiate în figura de mai jos:

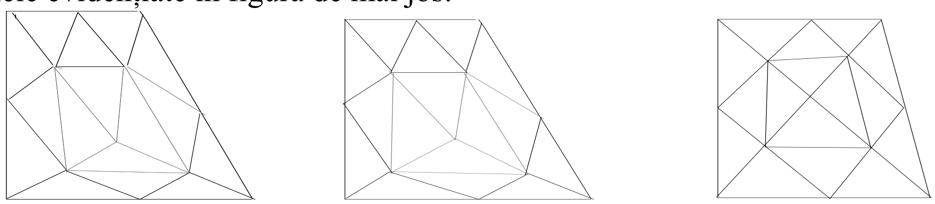

Figura 1

Aplicând teorema 2 în acest caz particular obținem (7,7,8) - 7 ∈ [0,1]

Încercări de găsire a dimensiunii în cazul general au fost făcute şi de Biltera şi Hass folosind instrumentele din algebră. Se pare că totuşi în abordarea acestei probleme trebuie ca prim pas găsirea unei formule pentru dimensiunea $H_{3,}^{1}{}_{\Delta}(R^2)$ pentru Δ arbitrar.

5. Subspații ale spațiului $S_{k,}^{p}{}_{\Delta}$

Fiind dificilă determinarea dimensiunii acestui spațiu e evident că la fel de dificilă e şi construcția unei baze.

Dacă k e suficient de mare în raport cu p există subspații ale spațiului $S_{k,}^{p}{}_{\Delta}$ cu aceeaşi putere de aproximare ca cea a spațiului. Spre exemplu subspațiile super-spline introduse de Chui şi Lai (1987) formate din elementele spațiului care sunt în fiecare vârf de clasă $C^{(2p)}$. Impunerea în noduri a acestei condiții asigură consistența condițiilor de netezime impuse.

Se pun aici o serie de întrebări. Datorită succesului metodei multigrid care lucrează cu un şir de subspații obținute fiecare prin rafinarea celui precedent se pune problema utilizării ei şi în cazul funcțiilor spline de mai multe variabile. În cazul în care spațiile implicate sunt spații conținând funcții super-spline datorită ordinului înalt de netezime impus în vârfuri spațiul găsit în final nu este cel corect.

Din aceste motive gradul k trebuie să fie suficient de înalt (de exemplu pentru n=2 $k\geq 4p+1$) .

Continuând raționamentul se ajunge că pentru d arbitrar, $k\geq 2^d p+1$.

Observație. *Aceste condiții sunt necesare şi suficiente . Ele furnizează un spațiu super-spline în care aproximația poate fi construită local pe fiecare ochi p depinzând doar de datele problemei.*

6. Funcții B spline de mai multe variabile.

Funcții spline poliedrale. Funcții spline de tip simplex şi box.

Rolul central pe care îl conferă matematicieni ca Curry, Schomberg funcțiilor B spline de o variabilă (ilustrat prin aplicații de C. de Boor şi Schumaker 1981) a motivat interesul manifestat pentru generalizarea noțiunii.

Această generalizare se bazează pe o proprietate obscură ilustrată de figura:

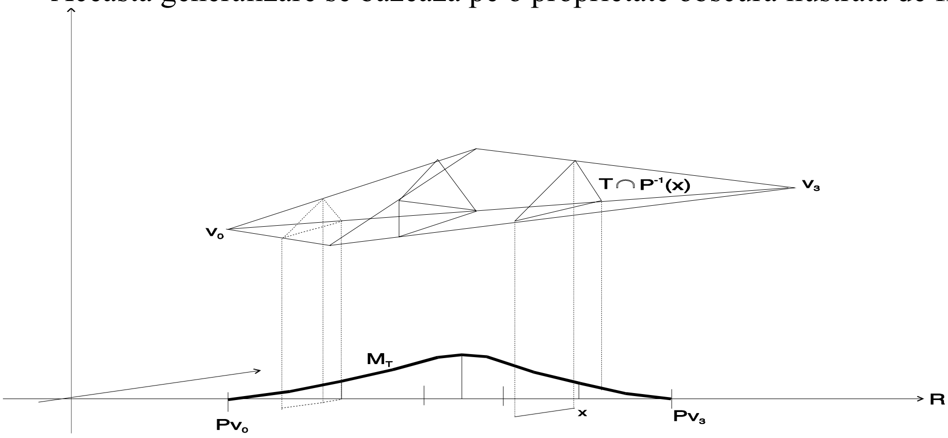

Figura 2

şi demonstrează original în lucrările amintite (se arată că funcțiile B spline prezintă o concavitate de tip lung).

Fie $x=(x_1,x_2,..,x_s)$. Se ştie că funcția spline e unica funcție pentru care

$[x_1,x_2,..,x_s,t]=\int_R M(t/x)D^s f(t)dt$

pentru toate funcțiile suficient de netede. Prelucrând acest rezultat Schomberg a ajuns la ecuațiile

$\int_R M(t/x)D^s f(t)dt = \int_0^1\int_0^{r_1}\Lambda\int_0^{r_{s-1}} D^s f(x_0 + r_1\nabla x_1 + K + r_s\nabla x_s)\, K\, d\Gamma_2 d\Gamma_1$ unde $\nabla x_j = x_j - x_{j-1}$.

Aceste ecuații evidențiază faptul că $M(t/x)$ este măsura mulțimii (volumul de dimensiune s-1).

$\{r\in T_s \mid x_0+r_1\nabla x_1+\ldots+r_s\nabla x_s=t\}$ unde Ts este un s simplex de forma

$T_s = \{r\in R_s \mid 1 \ge r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_s \ge 0\}$.

Acest simplex are nodurile (vârfurile) $v_j=\sum_{i=1}^{j} I_i$ j=1,2,…,s. Dacă definim transformarea afină $P:R_s\to R$ $r\to x_0+r_1\nabla x_1+\ldots+r_s\nabla x_s$. (P va duce vârfurile v_j în x_j pentru orice j).

În consecință, funcția M pe care o considerăm de variabilă t reprezintă distribuția $f \to \int_{T_s} f \circ p$ funcției f corespunzându-i o funcție din R^s. Această transformare este ilustrată şi de figura 2 pentru s = 3.

Odată aceste considerații făcute, generalizarea poate avea un obiect. Ea a fost inițiată de Schomberg (1965), Micchelli (1980), De Vore (1983), Boor şi Hölling (1982) după cum urmează:

Definiția 4. *Fiind dată o varietate convexă B în R^s și o transformată p: $R^s \to R^d$, vom defini funcția B - spline M_B ca distribuția $f \to \int_b f \circ p$. M_B este nenegativă și are ca suport P(B) (domeniu). M_B este funcție numai când $P(B) \subset R_d$, are interior nevid dar este întotdeauna o funcție pe afine (P(B)). Când B este un politop (o înfășurare convexă a unei mulțimi finite) M_B se numește funcție spline poliedrală.*

O funcție spline poliedrală este o funcție polinomială pe toate imaginile lui P, pe fețele lui B, de dimensiune d-1.

După o translație, dacă e necesar, putem presupune că P este o transformare liniară. Atunci $D_y(f \circ p) = (D_{p_y} f) \circ p$.

Mai mult, dacă M_B este o distribuție $D_y M_B$ dacă folosim integrarea prin părți
$D_y M_B f = - M_B(D_y f)$
Pentru $y \in R^d$ arbitrar și $f \in D^-(\{y\})$

$$(D_{P2} M_B) f = -\int_B (D_2 f) \circ p = -\int_B D_2(f \circ p) = -\int_{\partial B} z^T n (f \circ p) = -\sum_{F \in B} z^T{}_{(s-1)} n_F M_F f$$

este frontiera orientată a lui B.

Dacă B este politop frontiera este reuniunea fețelor $B^{(s-1)}$ (de dimensiune s-1) care mărginesc pe B n_F fiind valoarea constantă a normalei pe fața F.

Folosind această relație de recurență putem arăta că orice derivată a lui M_B de ordin mai mare decât s-d este o combinație de distribuții de forma M_B cu F de dimensiune mai mică decât d.

Deci pe orice componentă a mulțimii $\bigcup_{F \in B^{d-1}} P(F)$ unde B^{d-1} este mulțimea fețelor lui B de dimensiuni d-1. M_B este polinom de grad mai mic sau egal decât k=s-d.

Observație. *$M_B \in C^{s-m-1}$ cu m cel mai mic întreg pentru care p transportă orice $F \in B^{(m)}$ cu interior nevid.*

Exemplu. Fie $B=[0,1]^s$ cubul s - dimensional. $x_j=P(I_j)$ j=1,2,…,s $x_0=P(0) = 0$.

Atunci funcția B spline de două variabile poate avea discontinuități ale derivatelor pe imaginile prin P ale unor muchii ale lui B de forma $\left[\sum_{x \in U} x, \sum_{x \in W} x\right]$ cu U și W submulțimi arbitrare ale mulțimii $(x_0, x_1, \ldots, x_s)$. Orice astfel de mulțime este o parte a mulțimii (dublă înfășurătoare pătratică) formată din linii de forma $\{x \in R^2\ x(j)=h\}$ $j \in \{1,2\}$ și $h \in Z$. Atunci abstracție făcând de o translație x_j este unul din vectorii directori i_1, i. Acest lucru implică existența unei fețe a lui B de dimensiune s/2 care prin transformarea P este dusă într-o mulțime fără interior $\Rightarrow$ M_B este în cel mai bun caz de clasă $C^{s/2-2}$ dar s este număr par.

Situația este mai bună pe înfășurătoarea formată din linii de forma $\{x \in R^2\ x(j)=h\}$ $j \in \{1,2,3\}$, $h \in Z$ și x(3)=x(2)-x(1). Acum $x_j=I_j$ j=1,2,3 funcția M_B se confundă cu elementul liniar finit (Courant 1943).

Pentru o bună aproximare nu vom folosi o singură funcție spline poliedrală ci o combinație liniară în care intră suficient de multe asemenea funcții. În consecință aceste defecte nu vor afecta prea mult calitatea aproximației.

Aceasta înseamnă că după o normalizare (dacă e necesară). $(M_B)_{B \in B}$ mulțime de funcții spline poliedrale vor forma o partiție a unității și vor satisface $\sum_{B \in B} M_B = 1$. M_B pot fi alese și astfel. Dacă există o vecinătate de dimensiune s-d, elementele din B fiind disjuncte două câte două și cu reuniunea o mulțime de forma $R^d \times C$ avem:

$$\sum_{B \in B} M_B(x) = \underset{s-d}{vol}(C)$$

în aceste formule având $M_B \geq 0$.

Dacă $B=[0,1]^s$ M_B se numeşte funcţie box spline.

Concluzie: *Orice funcţie B spline de mai multe variabile cu* B *un simplex standard $(0,i_1,i_2,\ldots,i_s)$ este o cutie standard $B = [0,1]^s$ sau un con standard din R_+^s, iar transformarea P poate fi găsită dacă se cunosc P(ij) pentru orice j.*

O primă sinteză consistentă în legătură cu funcţiile B spline de mai multe variabile a fost realizată de Dahmen şi Michelli (1986). În 1992 de Boor, HÖlling şi Riemenschneider au consacrat acestor funcţii spline box o întreagă lucrare. Prima funcţie B spline şi cea mai folosită în aplicaţii este cea de tip simplex. Dacă $v_0,\ldots,v_s$ este mulţimea nodurilor unui simplex atunci $M(v_0,\ldots,v_s)$ e unic determinată de $v=(Pv_j)_j$. Pentru acest motiv funcţia spline simplex se mai notează $M(\cdot/x)$ unde x este un vector din R^d (imaginea prin P a vârfurilor unui simplex).

Simplexul se alege astfel încât $\int_{R^d} M(\cdot / x)=1$.

Corespondentul de o variabilă al funcţiilor spline box sunt funcţiile B spline cardinale (vezi monografia lui Schömberg 1969). Ca şi acestea, ele au condus foarte repede la o teorie matematică bogat exemplificată prin frumoasele rezultate obţinute de Dahmen şi Michelli.

Teorema 3 *(C. de Boor 1993, pag 91)*

Fiind dată Δ o triangulaţie.

(i) V o variaţie de dimensiune d+1 cu $\langle V\rangle\in\Delta$

(ii) $\beta\in Z^V{}_+$ cu $|\beta|=k$

(iii) $Y^B = \{v_j \mid 0 \le j \le \beta(v)\ v\in V\}$

(iv) punctele v_j se obţin alegând pentru fiecare v din mulţimea vârfurilor $V(\Delta) = \bigcup_{\langle V\rangle\in\Delta} \langle V\rangle$ corespunzătoare diviziunii alese k puncte adiţionale $v_1,\ldots,v_k$ şi punând $v_0=v$ (vom impune o singură condiţie acestei alegeri a punctelocionale vj j=1,..,k v(V(() e următoarea).

Pentru orice varietate de dimensiune d + 1 v cu

$$<v> \in \Delta V\ \Omega_{v,k} = \cap\{(v_{\beta(v)})_{\delta\in V}: \beta\in Z_+^v\ |\beta| \le k\} \neq 0$$

Cu aceste presupuneri, Seidel (1992) demonstrează că orice funcţie $f\in S_{k,\Delta}^{k-1}$ se poate scrie $f = \sum_{v,\beta} M(\cdot / v^\beta)\omega(v,\beta)F_v(v^{\beta-1})$ unde $\omega(v,\beta)$ sunt factori de normalizare cunoscuţi cu β-i:$v\to\beta(v)-1$, iar $k = |\beta| = \#\, v^{\beta-i}$ şi F_v un polinom care coincide cu f pe celula $\langle v\rangle\in\Delta$. Aceasta înseamnă că F_v este unica formă multi-liniar simetrică pentru care $f(x) = F_v(x,x,\ldots,x)\ \forall\ x\in\langle v\rangle$. Demonstraţia foloseşte un rezultat valabil pentru orice $f \in S_k$ şi care a fost stabilit de Dahmen în 1999. Rezultatul prezentat în acest paragraf a fost surprinzător şi iniţial de neaşteptat.

7. Ordinul de aproximaţie

Tratarea aproximaţiei şi rezultatele obţinute cu privire la ordinul de aproximaţie sunt prezentate în capitolul publicat de C de Boor în 1993 Puterea de aproximaţie a unui subspaţiu S al spaţiului $S_{k,\Delta}$ se măsoară în termenii partiţiei Δ $|\Delta| = \sup_{\delta\in\Delta} diam\,\delta$ şi ai netezimii funcţiei f pe care dorim să o aproximăm.

Rezultatul tipic este $dist(f,s) \le c|\Delta|^r \|\Delta^r f\|$

în această formulă $\|\Delta^r f\|$ e măsura derivatei de ordinul r al funcţiei f şi constanta c este independentă de f şi Δ.

Spre exemplu constanta poate depinde de măsura uniformă

$R_\Delta = \sup_{\delta \in \Delta} \inf\{M / m\ B_m(x) \subset \delta \subset B_M(y)\}$ unde $B_m(x)$ este sfera deschisă cu centrul în x şi de rază m, deci este independentă de Δ numai dacă punem restricţia $R_\Delta \le R$ pentru R oarecare finit.

O versiune mai simplă a formulei ordinului de aproximare pentru s este următoarea:

Teorema 4. *Fie $\sigma_h s = \{ f(\cdot/h)\ f \in s \}$. Spunem că s are ordinul de aproximaţie r şi scriem AO(s)=r.*

Atunci

(i) pentru orice funcţie suficient de netedă f $dist(f, \sigma_h s)=O(h^r)$

(ii) $Q_h \subset \sigma_h s$ $\|f- Q_h s\| \le ch^r \|D^r f\|$ (Q_h o schemă de aproximare oarecare) $Q{:}f \to \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi f(z_\varphi)$

8. Condiţia Strang Fix şi puterea de aproximaţie a spaţiilor invariante din $L_2(R^d)$

Fie $\varphi \in L_2(R^d)$ $\varphi \in S$, S invariant faţă de translaţii, $S+\alpha=\alpha$. (De exemplu - spaţiul $S^\rho_{k,\Delta}$ este invariant faţă de translaţii dacă $\Delta+\alpha=\Delta$ orice $\alpha \in Z^d$.

Fie c: $Z^d \to R$ un exemplu de spaţiu invariant este

$S_0(\varphi)_{(x)} = \left\{ \sum_{\alpha \in Z^d} \varphi(x-\alpha)c(\alpha) \,\middle|\, c \in l_0(Z^d) \right\}$, $l_0(Z^d)$ conţine toate cazurile finite din Z^d.

$S_0(\varphi)$ se numeşte spaţiul invariant generat de φ pentru că este cel mai mic spaţiu invariant ce conţine φ.

Închiderea acestuia $S(\varphi)=S_0(\overline{\varphi})$ se numeşte spaţiul invariant principal şi se notează PSI.

Dacă Φ este o mulţime finită de funcţii definite pe R^d, $S(\Phi)= \sum_{P \in \Phi} S_0(\varphi)$.)

Problema determinării AO(S(φ)) pentru funcţii φ cu suport compact a condus la condiţia Strang Fix care priveşte comportarea transformatei Fourier $\hat{\varphi}\xi \to \int_{R^d} \varphi^{e-\xi}$ a funcţiei φ în punctele $2\pi Z^d$ unde $e_Q{:}R^d \to C$ $x \to e^{iQTx}$.

Cu aceste precizări condiţia Strang Fix se enunţă astfel:

Definiţia 5 *φ satisface condiţia Strang Fix SF_r dacă*

(i) $\hat{\varphi}(0) = 1$

(ii) *pentru orice multi-indice α cu $/\alpha/< r$ avem $p^\alpha \hat{\varphi}=0$ pe $2\pi Z^d \setminus \{0\}$.*

Importanţa acestei condiţii rezultă şi din următoarea teoremă.

Teorema 5. *Dacă S este un subspaţiu invariant închis al spaţiului $L_2(R^d)$ şi $f,g \in L_2(R^d)$*

$dist(f,S) \le dist(f,P_{S(g)}) + 2dist(f,S(g))$.

Această teoremă ne arată că puterea unui subspaţiu invariant general din $L_2(R^d)$ e atinsă de unul din subspţiile PSI.

Lemă. *Există funcţii simple g pentru care orice r $dist(f,\sigma_h(g)) = O(h^r \|f\|_{W_2^r(R^d)})$. Definiţia spaţiului Sobolev şi a normei corespunzătoare e dată în capitolul 9. $\|f\|_{W_2^r(R^d)}$ $\hat{\varphi}$) = $\|(1+/\!/^r \hat{f}\|$*

Corolar. *Dacă $\varphi \in L_2(R^d)$ şi $1/\hat{\varphi}$ este mărginită în apropierea lui 0 şi $\hat{\varphi}$ $w_2^\varphi(u)$ pentru $\varphi > r+d/2$ şi o vecinătate u a lui $2\pi Z^d \setminus 0$ şi φ satisface SF_r, atunci $AO(S(\varphi)) \ge r$.*

Note bibliografice

[1] de Boor, C., *Quasiinterpolants and Aproximation Power of Multivariale Splines in Computation of Curves and Surfaces*, Kluer 313-345, 1990.

[2] de Boor, C., *Multivariate Piecewise Polynomials*, Medison Acta Numerica, 1993.

[3] Chui, C. K. and Lai, M. I, *On Multivariate Vertex Splines and Application Topics on Multivariate Approximation*, Academic Press New York, 19–36, 1995